**用凯特摆测重力加速度**

日期：2023.10.20

**摘要：**凯特摆可用来精确地测量重力加速度，通过利用凯特摆作为复摆模型的共轭点，可以规避一些实验中难以测准的物理量对实验的影响，提高实验精度。本文作者将使用凯特摆测量合肥市当地的重力加速度，由实验的主要原理及操作手法出发，测量重力加速度并给出对测量结果的不确定度分析。

**关键词：凯特摆；重力加速度；不确定度分析**

**1 引言**

1818年凯特（Kater）设计出一种物理摆，他巧妙地利用物理摆的共轭点，避免和减少了某些不易准确测量的物理量对实验结果的影响，提高了测量重力加速度的精度。19世纪60年代雷普索里德(Pusuolide)对此作了改进，成为当时测重力加速度的最精确方法。波斯坦大地测量所(Persian geodetic survery)曾同时以五个凯特摆花了八年时间（1896-1904）测得当地重力加速度的值*g=* (981.274±0.003 )cm/s2。凯特摆测量重力加速度的实验方法不仅设计思想上有其独到之处，而且在科学史上有重要价值。

**2 实验原理**

在重力作用下绕固定水平轴在竖直平面内摆动的刚体称作复摆。如图2-1所示，设刚体质量为m，转轴O到重心G的距离为h，绕O轴刚体的转动惯量为I，当地重力加速度为g，当它绕O轴转动时即为一复摆。当复摆离开平衡位置时，受到重力分量作用而做周期性摆动，其运动方程为

 （1）

当摆幅很小时，有，式（1）可以简化成常见的简谐运动方程形式



上式中，为圆频率，又，于是复摆的振动周期为

 （2）

设复摆绕平行于O轴并且通过重心G的转动惯量为，根据平行轴定理，有



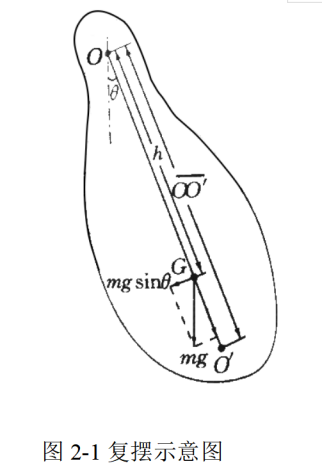
代入式（2）得：

  **（3）**

对比单摆周期的公式

可得   **（4）**

**称为复摆的等效摆长。如果能够精确测定测出周期*T*和等效摆长**，便可精确得到重力加速度*g*。



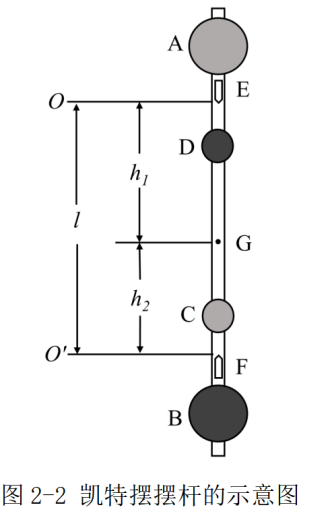
复摆的周期可以精确测定，但想通过公式**（4）**来精确测定是件不容易的事情。对于一般形状不规则，质量分布不均匀的复摆来说，其一，*h*是重心G到转轴O的距离，很难精确测定重心位置；其二，更是难以计算得到。

但是，如果利用复摆的共轭特性，就可以精确测定。即在复摆重心两侧，并且和重心处于同一条直线上的两个点O、 O',分别测量以O、O'为悬点的摆动周期*T*1 、*T*2，当*T*1和*T*2相等时，可以证明OO'就是等效摆长。

由此，凯特设计了形状特殊的凯特摆便于调节，如图2-2所示。对凯特摆而言，在实验中当两刀口位置确定后，通过调节A、B、C、D四摆锤的位置可使正、倒悬挂时的摆动周期*T*1和*T*2相等，则两刀口间的距离就是该摆的等效摆长**。由公式（3）可得

 **（5）**

 **（6）**



其中*T*1 和*h*1 为摆绕O轴的摆动周期和O轴到重心G的距离，*T*2 和*h*2 为摆绕O'轴的摆动周期和O'轴到重心G的距离。实验中要使得当*T*1和*T*2 完全相等十分困难，而且也并不需要，只要调节*T*1 ≈*T*2 时， 即为等效摆长。由式(5)和(6)消去，可得：

  **（7）**

此式中，**、*T*1*，* 、*T*2 都是可以精确测定的量，而*h*1、*h*2则不易测准。由此可知，a项可以精确求得，而b项则不易精确求得。但当 以及  值较大时，b项的值中分子很小，而分母可以很大，相对a项是非常小的，可以看作是*T*1 、*T*2 不完全相等的修正（当*T1*、*T2*完全相等时，b项等于0），这样b项的不精确对测量结果产生的影响就微乎其微了。凯特摆在设计时，两个大摆锤一个是金属材质，一个是塑料材质，正是为了使得重心偏向一遍，使得有较大差值，以减小b项的影响。

**3 实验**

本实验所用仪器有凯特摆、光电探头、多用数字测量仪(精度0.1ms) 、卷尺(2m/1mm, 最大允差 1.2mm)、丁形支架和铁架台。

**3.1 调节凯特摆，使悬挂点具备共轭点特性**

进行凯特摆实验时，应反复来回调节凯特摆两端的大小摆锤，用计数器不断检测正立和 倒置时凯特摆的周期变化，通过逐步逼近的方式，使两周期基本相等。本文作者在实验过程 中摸索出的调节技巧是

**1**  实验开始之前，一定要保证刀口和凹槽之间是线接触而不是点接触。

**2**  先调节大摆锤，在的条件下再进行小摆锤的调节，调节过程中需要 注意记录每次摆锤的调节方向(远离/靠近中轴线)，下一次就能相反方向调节。在最后调节 小摆锤的阶段中，可注意到摆锤颜色指代了摆锤材质的不同，黑色摆锤的密度大于橙色摆锤， 因而在相同调节距离的情况下，橙色小摆锤更适合用于微调。调节结束时有。

**3.2 确定质心位置，测量**

运用实验器材丁形支架，可不断调整支点位置以达到凯特摆的平衡，进而用钢卷尺多次 测量质心到一侧刀口的距离。实验装置设计中，可以使各摆锤质量不等，让凯特摆的质心偏向一侧，使得尽量大；实验调节中，尽量使越小越好，这样就可以遮掩式**（7）**中b项的影响，使其相对于a项来说可以忽略。

**3.3 正式测量**

需要测量的物理量包括、、*、*，其中和测量5组，和测量3组。测量数据如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 1 | 1.74031 | 1.74033 | 74.90 | 30.25 |
| 2 | 1.74014 | 1.74062 | 74.89 | 30.23 |
| 3 | 1.74019 | 1.74050 | 74.90 | 30.27 |
| 4 | 1.74057 | 1.74085 |  |  |
| 5 | 1.74029 | 1.74071 |  |  |

**4 实验结果讨论**

取置信概率,。卷尺置信系数为 ，。

**4.1 周期数据处理**

周期平均值，。

标准差。

则A类不确定度。

对多用数字测量仪，，B类不确定度。

则合成不确定度。

故周期测量结果。

**3.2 长度数据处理**

等效摆长平均值, 平均值。

标准差。

A类不确定度，B类不确定度。

合成不确定度。

故结果为：。

**3.3 重力加速度计算及数据处理**

由（7）式知：，代入计算得：

。

只计算a项对g不确定度的影响，有。则

。

代入得：。

**g的表达式为：**，相对误差。

**5 结论**

1. 凯特摆测量重力加速度，在实验设计上有什么特点？避免了什么量的测量？降低了哪个量测量精度？实验室如何来实现？

讨论：在凯特摆测量重力加速度的实验中，通过增加精确测量量的权重，降低不易测量量的权重，即：将难以测量的量转化为容易测量的量，即用易测量，, ，构成最终结果的主要成分，用减小了难测量在最终结果中的影响。在实验中，通过凯特摆中间轻两头重的结构增大, 从而降低实验误差。

此实验避免了对复摆转动惯量的测量，降低了转轴和重心间距的测量精度。在实验中采取调节质量分布使约等于，减少含项对结果的影响。

1. 结合误差计算，影响凯特摆测量精度的主要因素是什么？将所得的实验结果与当地的重力加速度的公认值比较，有无偏差？为什么？

讨论：由于周期测量精确度高，本次实验的误差主要来自于长度测量，其中项影响较大。与合肥本地的重力加速度大小9.7947相比，测量值相对较小。

**5 参考文献**

[1] 盛妍. 凯特摆测重力加速度实验中的误区——以虚拟仿真实验为例[J]. 大学物理, 2021(10).

[2] Bill Crummett,张小溪.重力加速度的测量[J].怀化师专学报.1991(3).

[3] 中国科学技术大学实验讲义《实验2 用凯特摆测量重力加速度》.